

具有较大 harmonic 指数的四圈图*

王宇团, 邵燕灵

(中北大学 理学院, 山西 太原 030051)

摘要: 确定了所有 $n (n \geq 9)$ 阶四圈图中极大至第八大 harmonic 指数及对应的极图结构.

关键词: harmonic 指数; 四圈图; 度

中图分类号: O157 文献标志码: A 文章编号: 1007-9793(2018)03-0030-06

1 引言

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单连通图^[1], 其中 $V(G)$ 、 $E(G)$ 分别表示图 G 的点集和边集, 记 $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$. 若 $m = n + c - 1$, 则图 G 被称为 c 圈图. 当 c 为 0、1、2、3、4 时, 图 G 分别被称为树、单圈图、双圈图、三圈图、四圈图.

记 $Te(n)$ 为所有四圈图的集合, $d_G(x)$ 表示图 G 中点 x 的度, 且下文中在不引起混淆的情况下将 $d_G(x)$ 简写为 $d(x)$. 图 G 中点 u 的邻点集用 $N_G(u)$ 表示, 顶点的最小度和最大度分别用 $\delta(G)$ (或 δ)、 $\Delta(G)$ (或 Δ) 表示. $c_k(G)$ 表示图 G 中度为 k 的点的个数, e_{ij} 表示图 G 中两端点的度分别为 i 和 j 的边, 且将边 e_{ij} 的条数记作 x_{ij} .

简单图 G 的 harmonic 指数定义为^[2]

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_G(u) + d_G(v)}$$

Favaron 等探讨了图的 harmonic 指数与其特征值之间的关系^[3]. 文献[4-6]给出了简单连通图、树、单圈图及双圈图的极大与极小 harmonic 指数, 并且描述了相应的极图. Deng 等人对树、单圈图和双圈图的 harmonic 指数做了进一步研究^[7]. 有关 harmonic 指数更多结论可参考[8-11].

2015 年, Dehghan-Zadeh 等人根据 $n = 5, 6$ 时取得极大 Randić 指数的四圈图定义了两类 n ($n \geq 7$) 阶四圈图, 然后证明了这两类图达到 n ($n \geq 7$) 阶四圈图的极大与第二大 Randić 指数^[12]. 本文参考[12]中的结论, 将所有四圈图按照其边结构进行分类, 最终确定了所有 n ($n \geq 9$) 阶四圈图的前八大 harmonic 指数及对应的极图结构.

2 预备知识

引理 2.1^[7] 任意 n 阶简单连通图 G 满足 $H(G) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}f(G)$, 其中

* 收稿日期: 2017-12-06

基金项目: 山西省自然科学基金资助项目(201601D202003).

作者简介: 王宇团(1994-), 女, 山西吕梁人, 硕士研究生, 主要从事图论与组合数学方向研究.

通信作者: 邵燕灵. E-mail: ylshao@nuc.edu.cn.

$$f(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{(d(u) - d(v))^2}{d(u)d(v)(d(u) + d(v))}$$

引理 2.2 设 G 为 n 阶简单连通图, $f(e_{ij}) = \frac{(i-j)^2}{ij(i+j)}$, 则 $f(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} f(e_{ij})$.

证明 由引理 2.1 知

$$f(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{(d(u) - d(v))^2}{d(u)d(v)(d(u) + d(v))}$$

对任意 $uv \in G$, 令 $d(u) \leq d(v)$, 记 $d(u) = i, d(v) = j$, 则

$$\frac{(d(u) - d(v))^2}{d(u)d(v)(d(u) + d(v))} = \frac{(i - j)^2}{ij(i + j)}$$

因为图 G 中 e_{ij} 的个数为 x_{ij} , 所以

$$f(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{(d(u) - d(v))^2}{d(u)d(v)(d(u) + d(v))} = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} f(e_{ij})$$

又当 $i = j$ 时, $f(e_{ij}) = 0$, 从而

$$f(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} f(e_{ij})$$

证毕.

本文中用到的 $f(e_{ij})$ 的值有

$$f(e_{12}) = \frac{1}{6}, f(e_{13}) = \frac{1}{3}, f(e_{23}) = \frac{1}{30}, f(e_{24}) = \frac{1}{12}, f(e_{25}) = \frac{9}{70}, f(e_{34}) = \frac{1}{84}$$

推论 2.1 设 G 为 n 阶简单连通图, 则 $H(G) \leq \frac{n}{2}$, 当且仅当图 G 为正则图时等号成立.

证明 由引理 2.2 知, $f(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} f(e_{ij})$. 而 $x_{ij} \geq 0, f(e_{ij}) \geq 0$, 所以 $f(G) \geq 0$. 再由引理 2.1

知, $H(G) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} f(G)$, 从而 $H(G) \leq \frac{n}{2}$.

当图 G 为正则图时, $f(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} f(e_{ij}) = 0$, 因此 $H(G) = \frac{n}{2}$

证毕.

推论 2.2 设 $G \in Te(n)$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq j} x_{ij} &= n + 3 \\ \sum_{i \leq j} x_{ij}(i + j) &= \sum_{u \in V(G)} d^2(u) \end{aligned}$$

证明 根据四圈图的定义得

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq j} x_{ij} &= |E(G)| = n + 3 \\ \sum_{i \leq j} x_{ij}(i + j) &= \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) = \sum_{u \in V(G)} d^2(u) \end{aligned}$$

证毕.

按照图的边结构, 下面定义十类重要的不含悬挂点的四圈图, 且在图 1 中分别给出了这十类图中的一个具体例子.

$$Re_6 = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{33} = 9, n = 6\};$$

$$W_5 = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{34} = 4, x_{33} = 4, n = 5\};$$

$$Cp_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{23} = 2, x_{33} = 8, x_{22} = n - 7, n \geq 7\};$$

$$D_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{23} = 4, x_{33} = 7, x_{22} = n - 8, n \geq 8\};$$

- $Z_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{23} = 6, x_{33} = 6, x_{22} = n - 9, n \geq 9\}$;
- $Gw_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{34} = 4, x_{23} = 2, x_{33} = 3, x_{22} = n - 6, n \geq 6\}$;
- $K_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{34} = x_{23} = 4, x_{33} = 2, x_{22} = n - 7, n \geq 7\}$;
- $Q_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{34} = 3, x_{24} = x_{23} = 1, x_{33} = 4, x_{22} = n - 6, n \geq 6\}$;
- $Fs_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{24} = 2, x_{34} = 4, x_{33} = x_{44} = 1, x_{22} = n - 5, n \geq 5\}$;
- $B_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{24} = 2, x_{34} = 2, x_{33} = 5, x_{22} = n - 6, n \geq 7\}$.

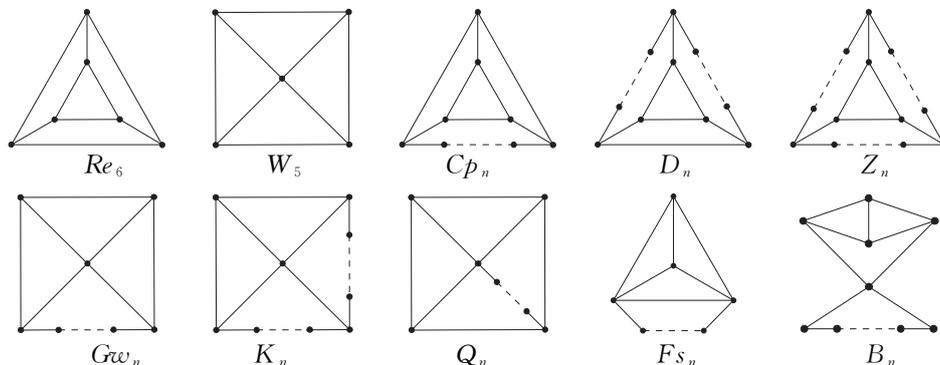


图 1 十类不含悬挂点的四圈图

Fig. 1 Ten classes of tetracyclic graphs without pendent vertices

3 四圈图中具有较大 harmonic 指数的图

定理 3.1 设 $n \geq 5$, $A_n = Re_6 \cup W_5 \cup Cp_n \cup D_n \cup Z_n \cup Gw_n \cup K_n \cup Q_n \cup B_n \cup Fs_n$, 则当 $G \in Te(n) \setminus A_n$ 且无悬挂点时, $H(G) < \frac{n}{2} - \frac{3}{28}$.

证明 设 $G \in Te(n) \setminus A_n$, 由引理 2.1 知, 仅需证明 $f(G) > \frac{3}{14}$.

因为图 G 无悬挂点, 所以 $\delta(G) \geq 2$. 当 $\delta(G) \geq 4$ 时, $|E(G)| \geq 2n > n + 3 = |E(G)|$, 矛盾. 从而 $2 \leq \delta(G) \leq 3$. 又因为 $G \in Te(n)$, 所以 $3 \leq \Delta(G) \leq 8$. 由四圈图的定义可知 $m = n + 3$, 故 $\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2m = 2n + 6$. 接下来分如下情况进行讨论.

情形 1 $\Delta(G) = 3$

因为 $2 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) = 3$, 所以图 G 当中仅有 2 度点和 3 度点, 从而 $\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2c_2(G) + 3c_3(G) = 2n + 6$. 又 $c_2(G) + c_3(G) = n$, 故 $c_3(G) = 6, c_2(G) = n - 6$. 由推论 2.2 得 $x_{23} + 2x_{33} = 18$, 故 $x_{23} \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

当 $x_{23} = 0, 2, 4, 6$ 时, 图 G 分别属于 Re_6, Cp_n, D_n, Z_n , 矛盾.

当 $x_{23} \geq 8$ 时, $f(G) \geq 8f(e_{23}) = \frac{4}{15} > \frac{3}{14}$.

情形 2 $\Delta(G) = 4$

由 $\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2c_2(G) + 3c_3(G) + 4c_4(G) = 2n + 6, c_2(G) + c_3(G) + c_4(G) = n$ 可得

$$c_3(G) + 2c_4(G) = 6$$

从而图 G 可以分为如下三种类型:

- (1) $c_4(G) = 3, c_2(G) = n - 3$

若 3 个四度点彼此邻接, 则 $x_{24} = 6$, 从而 $f(G) = 6f(e_{24}) = \frac{1}{2} > \frac{3}{14}$. 否则 $x_{24} > 6$, $f(G) > 6f(e_{24}) = \frac{1}{2} > \frac{3}{14}$.

(2) $c_4(G) = 2, c_3(G) = 2, c_2(G) = n - 4$

若 2 个四度点与 2 个三度点彼此邻接, 则 $x_{34} = 4, x_{33} = x_{44} = 1, x_{24} = 2$, 此时 $G \in Fs_n$, 矛盾. 否则, $f(G) > 2f(e_{24}) + 4f(e_{34}) = \frac{3}{14}$.

(3) $c_4(G) = 1, c_3(G) = 4, c_2(G) = n - 5$

由推论 2.2 得, $x_{23} + 2x_{24} + 2x_{33} + 3x_{34} = 20$. 而 $x_{24} + x_{34} = 4$, 由此分为以下几类:

① $x_{24} = 0, x_{34} = 4$

此时 $x_{23} + 2x_{33} = 8$, 故 $x_{23} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. 当 $x_{23} = 0, 2, 4$ 时, 图 G 分别属于 W_5, Gw_n, K_n , 矛盾.

当 $x_{23} = 6, 8$ 时, $f(G) \geq 6f(e_{23}) + 4f(e_{34}) = \frac{26}{105} > \frac{3}{14}$.

② $x_{24} = 1, x_{34} = 3$

此时 $x_{23} + 2x_{33} = 9$, 故 $x_{23} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 当 $x_{23} = 1$ 时, $G \in Q_n$, 矛盾. 当 $x_{23} \in \{3, 5, 7, 9\}$ 时,

$f(G) \geq f(e_{24}) + 3f(e_{34}) + 3f(e_{23}) = \frac{23}{105} > \frac{3}{14}$.

③ $x_{24} = 2, x_{34} = 2$

此时 $x_{23} + 2x_{33} = 10$, 故 $x_{23} \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. 当 $x_{23} = 0$ 时, $G \in B_n$, 矛盾. 当 $x_{23} \in$

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 时, $f(G) \geq 2f(e_{24}) + 2f(e_{34}) + 2f(e_{23}) = \frac{9}{35} > \frac{3}{14}$.

④ $x_{24} \in \{3, 4\}$

此时 $f(G) > 3f(e_{24}) = \frac{1}{4} > \frac{3}{14}$.

情形 3 $\Delta(G) = 5$

由 $2c_2(G) + 3c_3(G) + 4c_4(G) + 5c_5(G) = 2n + 6$ 及 $c_2(G) + c_3(G) + c_4(G) + c_5(G) = n$ 可得, $c_3(G) + 2c_4(G) + 3c_5(G) = 6$, 再由 $c_5(G) \geq 1$ 得, $c_3(G) + c_4(G) \leq 3$, 所以 $x_{25} \geq 2$, 从而 $f(G) > 2f(e_{25}) = \frac{9}{35} > \frac{3}{14}$.

情形 4 $6 \leq \Delta(G) \leq 8$

与情形 3 同理, $f(G) > 4f(e_{2\Delta}) > \frac{3}{14}$.

综上所述, 当 $G \in Te(n) \setminus A_n$ 时, $H(G) < \frac{n}{2} - \frac{3}{28}$.

证毕.

下面考虑含悬挂点的四圈图. 定义:

$Pe_n = \{G | G \in Te(n) \text{ 且 } x_{33} = 10, x_{23} = 1, x_{12} = 1, x_{22} = n - 9, n \geq 9\}$

图 2 为 Pe_n 中的一个图.

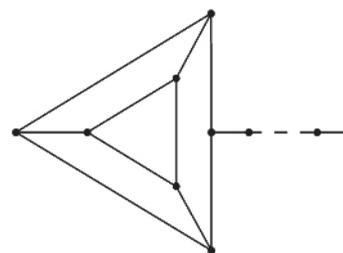


图 2 Pe_n 中的一个图
Fig. 2 A graph in Pe_n

定理 3.2 设图 G 是 $n \geq 5$ 且含悬挂点的四圈图, 当 $G \in Te(n) \setminus Pe_n$ 时, $H(G) < \frac{n}{2} - \frac{3}{28}$.

证明 设 $G \in Te(n) \setminus Pe_n$, 由引理 2.1 可知, 仅需证明 $f(G) > \frac{3}{14}$.

因为 $f(e_{1x})$ 对 x 单调递增, 所以当 $c_1(G) \geq 2$ 时, $f(G) > 2f(e_{12}) = \frac{1}{3} > \frac{3}{14}$. 下面设 $c_1(G) = 1$, 且点 u 是图 G 中唯一的悬挂点, 点 v 是该悬挂路的根节点, 即点 v 是距离点 u 最近的度大于 2 的点. 进行如下分类讨论:

情形 1 $v \in N_G(u)$

此时 $wv \in E(G)$, 从而 $f(G) \geq f(e_{wv}) \geq f(e_{13}) = \frac{1}{3} > \frac{3}{14}$.

情形 2 $v \notin N_G(u)$

此时 P_{wv} 是长度至少为 2 的一条悬挂路. 当 $d_G(v) \geq 4$ 时, 有

$$f(G) \geq f(e_{24}) + f(e_{12}) = \frac{1}{4} > \frac{3}{14}$$

当 $d_G(v) = 3$ 时, 用 \dot{G} 表示图 G 删除 P_{wv} 得到的子图, 则 $3 \leq \Delta(\dot{G}) \leq 8$. 对 $\Delta(\dot{G})$ 进行分类讨论.

(1) $\Delta(\dot{G}) = 3$

此时 $c_3(G) = 7$, $c_1(G) = 1$, $c_2(G) = n - 8$. 由推论 2.4 得: $x_{23} + 2x_{33} = 21$, 从而 $x_{23} \in \{1, 3, 5, \dots, 21\}$. 当 $x_{23} = 1$ 时, $G \in Pe_n$, 矛盾. 当 $x_{23} \in \{3, 5, 7, \dots, 21\}$ 时, 有

$$f(G) \geq 3f(e_{23}) + f(e_{12}) = \frac{4}{15} > \frac{3}{14}$$

(2) $\Delta(\dot{G}) = 4$

当 $c_4(\dot{G}) = 3$ 时, 因为图 \dot{G} 中两端点的度分别为 i 和 j 的边的个数大于等于 6, 从而

$$x_{24} \geq 4, f(G) > 4f(e_{24}) = \frac{1}{3} > \frac{3}{14}$$

当 $c_4(\dot{G}) = 2, c_3(\dot{G}) = 2$ 时, $c_4(G) = 2, c_3(G) = 3, c_2(G) = n - 6, c_1(G) = 1$, 从而

$$f(G) \geq 4f(e_{34}) + f(e_{23}) + f(e_{12}) = \frac{26}{105} > \frac{3}{14}$$

当 $c_4(\dot{G}) = 1, c_3(\dot{G}) = 4$ 时, $c_4(G) = 1, c_3(G) = 5, c_2(G) = n - 7, c_1(G) = 1$, 从而

$$f(G) \geq 4f(e_{34}) + f(e_{23}) + f(e_{12}) = \frac{26}{105} > \frac{3}{14}$$

(3) $5 \leq \Delta(\dot{G}) \leq 8$

此时 $c_3(\dot{G}) + c_4(\dot{G}) \leq 3$, 从而 $c_3(G) + c_4(G) \leq 4$, 故 $x_{2\Delta} \geq 1$, 从而

$$f(G) > f(e_{2\Delta}) + f(e_{23}) + f(e_{12}) \geq f(e_{25}) + f(e_{23}) + f(e_{12}) = \frac{23}{70} > \frac{3}{14}$$

综上所述, 当 $G \in Te(n) \setminus Pe_n$ 时, $H(G) < \frac{n}{2} - \frac{3}{28}$.

证毕.

4 结 论

结合定理 3.1 及定理 3.2 可知, 当且仅当 $G \in A_n \cup Pe_n$ 时, $H(G) \geq \frac{n}{2} - \frac{3}{28}$. 对 $A_n \cup Pe_n$ 中所有图集的 harmonic 指数进行计算得:

$$H(Re_6) = 3 \quad (n=6), \quad H(W_5) = \frac{52}{21} \quad (n=5), \quad H(Cp_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{30} \quad (n \geq 7),$$

$$H(D_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{15} \quad (n \geq 8), \quad H(Z_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{10} \quad (n \geq 9), \quad H(Gw_n) = \frac{n}{2} - \frac{2}{35} \quad (n \geq 6),$$

$$H(Q_n) = \frac{n}{2} - \frac{8}{105} \quad (n \geq 6), \quad H(K_n) = \frac{n}{2} - \frac{19}{210} \quad (n \geq 7), \quad H(B_n) = \frac{n}{2} - \frac{2}{21} \quad (n \geq 7),$$

$$H(Fs_n) = \frac{n}{2} - \frac{3}{14} \quad (n \geq 5), \quad H(Pe_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{10} \quad (n \geq 9).$$

对比上面各值可以得出如下结论:

定理 4.1 在四圈图中,

- (1) 当 $n=5$ 时, 达到极大及第二大 harmonic 指数的图分别为 W_5, Fs_5 ;
- (2) 当 $n=6$ 时, 达到极大至第四大 harmonic 指数的图分别为 Re_6, Gw_6, Q_6, Fs_6 ;
- (3) 当 $n=7$ 时, 达到极大至第六大 harmonic 指数的图分别为 $Cp_7, Gw_7, Q_7, K_7, B_7, Fs_7$;
- (4) 当 $n=8$ 时, 达到极大至第七大 harmonic 指数的图分别为 $Cp_8, Gw_8, D_8, Q_8, K_8, B_8, Fs_8$;
- (5) 当 $n \geq 9$ 时, 达到极大至第八大 harmonic 指数的图分别为 $Cp_n, Gw_n, D_n, Q_n, K_n, B_n, Z_n \cup Pe_n, Fs_n$.

参 考 文 献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.
- [2] FAJTLOWICZ S, WALLER W A. Conjectures of graffiti-II [J]. Congr Numer, 1986, 55: 51-56.
- [3] FAVARON O, MAHÉO M, SACLÉ J F. Some eigenvalue properties in graphs (conjectures of graffiti-II) [J]. Discrete Mathematics, 1993, 111(1-3): 197-220.
- [4] ZHONG L. The harmonic index for graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(3): 561-566.
- [5] ZHONG L. The harmonic index on unicyclic graphs[J]. Ars Combinatoria, 2012, 104: 261-269.
- [6] ZHONG L, XU K. The harmonic index for bicyclic graphs[J]. Utilitas Mathematica, 2013, 90: 23-32.
- [7] DENG H, BALACHANDRAN S, AYYASWAMY S K, et al. On harmonic indices of trees, unicyclic graphs and bicyclic graphs[J]. Ars Combinatoria, 2017, 130: 239-248.
- [8] LIU J. On the harmonic index of triangle-free graphs [J]. Applied Mathematics, 2013, 4(8): 1 204-1 206.
- [9] WU R, TANG Z, DENG H. On the harmonic index and the girth of a graph [J]. Utilitas Mathematica, 2013, 91: 65-69.
- [10] WU R, TANG Z, DENG H. A lower bound for the harmonic index of a graph with minimum degree at least two[J]. Filomat, 2013, 27(1): 51-55.
- [11] LIU J. On harmonic index and diameter of graphs[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2013, 1(3): 5-6.
- [12] DEGHAN-ZADEH T, ASHRAFI A R, HABIBI N. Tetracyclic graphs with extremal values of Randić index[J]. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 2015, 8(1): 1-8.

Tetracyclic Graphs with Large Maximum Harmonic Indices

WANG Yu-jian, SHAO Yan-ling

(School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: In this paper, we determined the first up to eighth maximum harmonic indices of n -vertices tetracyclic graphs when $n \geq 9$, and characterized the corresponding structure of extremal graphs.

Keywords: Harmonic index; Tetracyclic graphs; Degree